Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Математическое моделирование физических процессов»

1. Выберите один правильный ответ
Математическое моделирование — это средство для:
А) изучения свойств реальных объектов в рамках поставленной задачи
Б) упрощения поставленной задачи
В) поиска физической модели
Г) принятия решения в рамках поставленной задач
Правильный ответ: А
Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Выберите один правильный ответ
По поведению математических моделей во времени их разделяют на:
А) детерминированные и стохастические
Б) статические и динамические математические модели
В) непрерывные и дискретные модели
Г) аналитические и имитационные
Правильный ответ: Б
Компетенции: ПК-1, ПК-3

3. Выберите один правильный ответ
Что не входит в предмет математического моделирования?
А) построение алгоритма, моделирующего поведение объекта (системы).
Б) корректировка построенной модели
В) поиск закономерностей поведения объекта (системы)
Г) построение натурной модели
Правильный ответ: Г
Компетенции: ПК-1, ПК-3

4. Выберите один правильный ответ
Какие процессы должны отражать математические модели в задачах исследования поведения реальных объектов, процессов или систем
А) реальные физические нелинейные процессы, протекающие в реальных объектах
Б) реальные математические нелинейные процессы
В) реальные физические линейные процессы.
Г) реальные математические линейные процессы
Правильный ответ: А
Компетенции: ПК-1, ПК-3

5. Выберите один правильный ответ

Какими знаниями необходимо обладать для построения математической модели в прикладных задачах?

А) только специальными знаниями об объекте

Б) только математическими знаниями

В) математическими знаниями и специальными знаниями об объекте

Г) только физическими знаниями

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

6. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Требования к математической модели

	Требование		Определение соответствующего требования
1)	Экономичность	А)	степень применимости ММ к анализу более или менее многочисленной группы объектов определенного типа
2)	Погрешность	Б)	может быть абсолютной $\Delta = \lvert y_i^O - y_i^{MM} \rvert$ или относительной $\varepsilon^{MM} = \lvert y_i^O - y_i^{MM} \rvert / y_i^O$.
3)	Адекватность	В)	способность отражать заданные свойства объекта с погрешностью не выше заданной $\varepsilon^{MM} \leq \varepsilon^{ЗАД}$
4)	Универсальность	Г)	характеризуется затратами вычислительных ресурсов (время расчета, память), необходимых для реализации модели

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	Б	В	А

Компетенции: ПК-1, ПК-3

7. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Принципы построения математических моделей

	Наименование принципа		Содержание принципа
1)	Принцип информационной достаточности	А)	При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно.

			При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Определяет некоторый критический уровень априорных сведений о системе при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.
2)	Принцип осуществимости	Б)	Состоит в том, что создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.
3)	Принцип агрегирования	В)	Является ключевым. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности.
4)	Принцип множественности моделей	Г)	Заключается в том, что ложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы.

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

8. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Формы представления математических моделей

	Форма представления		Содержание
1)	Аналитическая форма	А)	Запись модели выполняется в виде явных, неявных, параметрических функций, интегральных и дифференциальных уравнений

			или других аналитических выражений, связывающих управляемые и неуправляемые переменные и цель моделирования.
2)	Алгоритмическая форма	Б)	Модель представляется в формализованном виде, т.е. в виде точного предписания последовательности некоторой системы операций над исходными данными с целью получения результата.
3)	Графическая форма	В)	Это представление моделируемого объекта на некотором графическом языке, например, на языке эквивалентных схем, диаграмм, языке графов и т. д.
4)	Цифровая форма	Г)	Упорядоченный набор {множество Y} чисел из некоторого допустимого множества значений и алгоритм (правило), который множеству $\{Y\}$ ставит в соответствие некоторую такую функцию F, что эта функция представляет исходный объект в соответствии с критериями качества моделирования. Эта форма характеризуется свойствами набора $\{Y\}$ и сложностью алгоритма.

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	В	Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

9. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Приемы упрощения математических моделей

	Наименование приёма		Содержание
1)	Упрощение уравнений	А)	Включает виды упрощений, основанные на особенностях движений моделируемых объектов, которые позволяют уменьшить количество искомых переменных математической модели
2)	Упрощение движений	Б)	Основными способами являются: – переход к безразмерным величинам (с помощью замены переменных) – приближенная замена переменных величин постоянными значениями; – пренебрежение малыми членами.

3)	Линеаризация	В)	Математические модели имеют наиболее простой вид математического описания, а также наиболее простые способы вычисления, в том случае, когда они линейные. Могут быть представлены как алгебраическими уравнениями, так и дифференциальными, методы решения которых хорошо разработаны
4)	Метод малого параметра	Г)	Применяется при аналитическом виде математического описания и основывается на разложении в ряд Тейлора искомого решения. Начинается применение метода с анализа вида аналитической зависимости и выявления малых членов. Цель такого анализа заключается в получении уравнения, простого для решения, которое не содержит этих малых членов.

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

10. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Приемы контроля математических моделей

	Наименование приёма		Характеристика
1)	Контроль размерностей	А)	Позволяет избежать несогласованностей в формулах основных законов природы и закономерностей объекта и подготовить их к применению в алгоритмах для вычислительной техники
2)	Контроль основных законов природы	Б)	Контроль законов сохранения, который необходим в моделях, не претендующих на всеобъемлющее описание оригинала, или в моделях, использующих численные методы вычисления.
3)	Контроль качественного поведения зависимостей	В)	Необходимо проводить во всех тех случаях, когда о промежуточных результатах можно что-либо сказать. Такой контроль особенно важен при использовании в качестве частных элементов моделей зависимостей, полученных статистической обработкой результатов измерений.

4)	контроль математической замкнутости	Г)	Проверка соответствия количества уравнений количеству неизвестных. Без этого просто невозможно "решить задачу в общем виде", что необходимо для разработки математического описания модели.

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	В	Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

11. Укажите правильную последовательность реализации этапов математического моделирования процессов или объектов.

А) Постановка задачи моделирования данного процесса или объекта

Б) Математическое описание процесса или объекта

В) Алгоритм и программная реализация процесса или объекта

Г) Проверка адекватности построенной модели

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

12. Укажите правильную последовательность реализации следующих основных действий при математическом моделировании процессов или объектов.

А) Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, результат - запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели

Б) Исследование математических задач, к которым приводят математические модели для решения основной задачи – получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для сопоставления их с результатами наблюдений изучаемых явлений

В) Выяснение соответствия принимаемой (гипотетичной) модели критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуется ли результат наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Г) Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

13. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это процесс создания модели и оперирование ею с целью получения сведений о реальном объекте.

Правильный ответ: Математическое моделирование

Компетенции: ПК-1, ПК-3

14. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____– это совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т. д.) и связей между ними, отражающих важнейшие для проектировщика свойства проектируемого технического объекта.

Правильный ответ: Математическая модель

Компетенции: ПК-1, ПК-3

15. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ это — логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

Правильный ответ: Имитационная модель

Компетенции: ПК-1, ПК-3

16. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____это — численный метод решения математических задач, при котором искомые величины представляют вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления, это явление моделируется, после чего нужные характеристики.

Правильный ответ: Статистическое моделирование

17. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ это —дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое моделирует распределение температуры в заданной области пространства и её изменение во времени.

Правильный ответ: Уравнение теплопроводности

Компетенции: ПК-1, ПК-3

18. Построить математическую модель и на её основе решить физическую задачу вычисления работы по сжатию газа в резервуаре.

Привести расширенное решение.

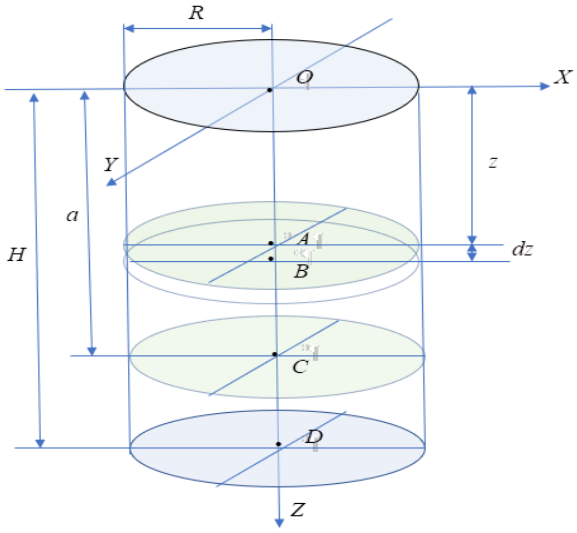
Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат.

Чтобы вычислить работу, затрачиваемую на сжатие газа в цилиндре радиуса R и высотой H, воспользуемся существующей зависимостью между объемом Vи давлением P газа при изотермическом изменении состояния газа, т. е. постоянной температуре, которая, согласно закону Бойля-Мариотта, имеет вид $P_1V_1 = P_2V_2 = C - const$.

Пусть в начале процесса центр поршня находился в т. O с аппликатой $z_O = 0$, а давление в цилиндре было равным P_0. Объём цилиндра равен $V_0 = \pi R^2 H$. Обозначим через $P(z)$ – давление газа в цилиндре при перемещении

поршня на расстояние z от начального положения (центр поршня находится в т. A с аппликатой $z_A = z$).



При этом объём оставшейся части цилиндра с газом с высотой $AD = H - z$ равен $V(z) = \pi R^2 \cdot AD = \pi R^2 \cdot (H - z)$. Тогда

$P_0V_0 = P(z)V(z); P_0\pi R^2 H = P(z)\pi R^2(H - z)$.

Из последнего уравнения находим силу давления газа $P(z)$:

$$P(z) = \frac{P_0\pi R^2 H}{H - z}.$$

При перемещении поршня на расстояние dz затрачивается элементарная работа $dA = P(z)dz = \frac{P_0\pi R^2 H}{H-z}dz$. Тогда работа по сжатию газа в цилиндрическом резервуаре при перемещении поршня из начальной точки O с аппликатой $z_O = 0$ в точку C с аппликатой $z_C = a, (0 < a < H)$вычисляется по формуле $A = \int_a^b F(x)dx$. Тогда

$$A = \int_a^b F(x)dx = \int_0^a \frac{\pi P_0 R^2 H}{H - z}dz = \pi P_0 R^2 H \int_0^a \frac{dz}{H - z}$$

где a - расстояние, на которое перемещается поршень.

Критерии оценивания:

– анализ физических составляющий процесса сжатия и построение математической модели заданной задачи поиска работы по сжатию газа с использованием закона Бойля-Мариотта;

– интегрирование уравнения и получение результата

2. Решить задачу, используя методы теории оптимального управления

Дана модель объекта управления в виде

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases}$$

где $x \in R^2$, $u \in [-1; 1]$, $t \in [0; t_1]$.

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t, x)$ с обратной связью, переводящее объект из любого начального состояния в начало координат за наименьшее время, т.е. обеспечивающее минимум функционала

$J = \int_0^{t_1} dt, \ \ \forall x(0) \in R^2.$

(Справочная информация:

1. Уравнение Беллмана для данной задачи управления;

$$\min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + F(t,x,u) \right\} = 0,$$

$$\varphi^{Б}(t_1,x) = G(x)$$

2. Достаточные условия оптимальности:

Если существует функция $\varphi(t,x) \in \Phi$, удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничными условиями

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - F(t,x,u) \right\} = 0 \ \ \forall (t,x) \in Q$$

$\varphi(t_1,x) = -G(t_1,x) \quad \forall (t_1,x) \in S$

и управление $u^*(t,x) \in U_n$ удовлетворяющее условию

$$\mathrm{u}^*(t,\mathrm{x}) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_i} f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) - F(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \right\},$$

то $u^*(t,x)$ является оптимальным. При этом минимальное значение функционала равно $\min_{d \in D(t_0,x_0)} J(d) = -\varphi(t_0,x_0) \quad \forall (t_0,x_0) \in Q.$)

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f_1(t,x,u) = x_2$, $f_2(t,x,u) = u$, $F(t,x,u) = 1$, $G(t_1,x) \equiv 0$, $x(t_1) = (0,0)^T$. Решается задача Лагранжа.

Для рассматриваемой задачи записываем уравнение Беллмана и граничное условие:

$$\min_{|u| \le 1} \left\{ \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2} u + 1 \right\} = 0, \quad \varphi^{Б}(t_1,0) = 0.$$

Так как все траектории системы должны попасть в точку $x = (0,0)^T$ при $t = t_1$, то граничное условие определено только в этой точке.

Находим структуру оптимального управления из условия минимума выражения в фигурных скобках: $u^*(t,x) = -\mathrm{sign} \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2}$.

Подставляем полученное выражение для управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial \varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2} \right| + 1 = 0, \quad \varphi^{Б}(t_1,0) = 0.$$

Функция $$\varphi^{Б}(t,x) = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, x_1 > -\frac{1}{2} x_2 \cdot |x_2|, \\ |x_2|, x_1 = -\frac{1}{2} x_2 \cdot |x_2|, \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}, x_1 < -\frac{1}{2} x_2 \cdot |x_2|, \end{cases}$$

удовлетворяет граничному условию и уравнению в трех характерных областях, в чем можно убедиться подстановкой.

Искомое оптимальное управление с полной обратной связью имеет вид

$$u^*(t,x)=\begin{cases}-1, x_1 > -\frac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ -\mathrm{sign}x_2, x_1 = -\frac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ 1, x_1 < -\frac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\end{cases}$$

где $x_1=-\frac{1}{2}x_2\cdot|x_2|$ – уравнение линии переключения оптимального управления.

Вычисленные при $x_1 > -\frac{1}{2}x_2\cdot|x_2|$ производные функции Беллмана равны:

$\frac{\partial\varphi^{\text{Б}}(t,x)}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\varphi^{\text{Б}}(t,x)}{\partial x_1}=\frac{2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}},\ \frac{\partial\varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2}=1+\frac{2x_2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}}$

Имеем $\frac{\partial\varphi^{\text{Б}}(t,x)}{\partial x_2}>0$, т.е. $u^*(t,x)=-\mathrm{sign}\frac{\partial\varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2}=-1$. Подставляя эти выражения в левую часть уравнения Беллмана, получаем

$$\frac{\partial\varphi^{Б}(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_1}x_2-\left|\frac{\partial\varphi^{Б}(t,x)}{\partial x_2}\right|+1=$$

$$=0+\frac{2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}}x_2-\left|1+\frac{2x_2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}}\right|+1=0.$$

Следовательно, в области $x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|$ полученные функции $\varphi^{\text{Б}}(t,x)$ и $u^*(t,x)$ являются решением задачи.

Правильный ответ: $u^*(t,x)=-1$

Критерии оценивания:

– анализ математической модели заданной задачи поиска оптимального управления её приведение к задаче Лагранжа;

интегрирование полученного уравнения;

формирование структуры оптимального управления;

решение уравнения Беллмана с целью получения искомого оптимального управления.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

3. Построить математическую модель малых поперечных колебаний струны при следующих условиях.

1) Рассмотреть только такие колебания струны, в которых:

а) векторы смещения точек струны лежат в одной плоскости (x,u);

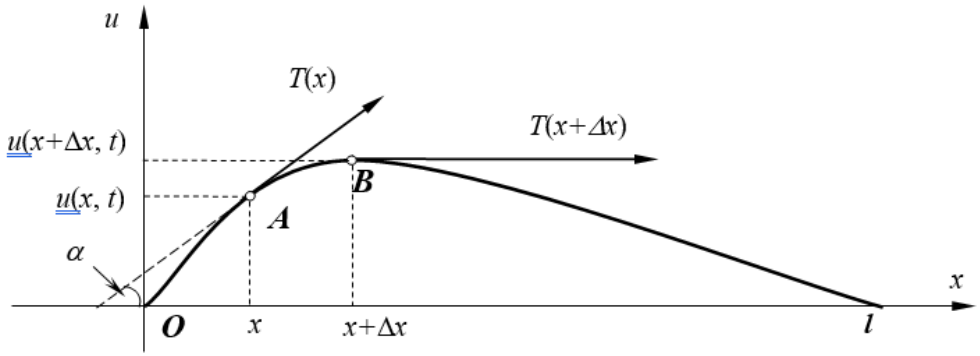
б) вектор смещения перпендикулярен в любой момент времени к оси *Ox* (поперечные колебания), т.е. $\vec{u}(x,t)=u(x,t)$;

в) ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны, т.е. таких, в которых можно пренебречь квадратом величины $u_x'(x,t)$ (скорость изменения формы) в сравнении с единицей.

2) В рамках этой модели величину натяжения T, возникающего в струне, можно считать не зависящей от времени t и удлинением участков струны в процессе колебаний можно пренебречь. Следовательно, в силу закона Гука величина T не зависит от времени, т.е. $T(x,t) = T(x)$.

Справочная информация: предполагается, что на рассматриваемом участке (x_1, x_2) невозмущенной струны его длина l_0 в начальный момент времени равна $x_2 - x_1$, а в некоторый момент времени $t - l$. Тогда для малых колебаний

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x')^2}\, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx = x_2 - x_1$$



Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат.

Составим уравнение движения малого участка струны AB длиной Δx. Его движение описывается вторым законом Ньютона: $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$, в котором m – масса участка AB $(m = \rho(x) \cdot \Delta x, \rho(x)$ – линейная плотность струны), $\vec{a} = \vec{u}''(x,t)$ – ускорение точек участка. Сила $\vec{F}$ представляет собой равнодействующую внутренних и внешних сил, приложенных к рассматриваемому участку. Под внутренней силой понимается сила, действующая на элемент струны со стороны смежных с ним участков в точках A и B. Величина этой силы равна $\vec{T}(x + \Delta x) - \vec{T}(x)$. Внешние силы, представляют собой воздействие на струну различных физических полей или тел. Результирующая этих сил может быть представлена в виде $\vec{f}(x,t)\Delta x$ ($\vec{f}(x,t)$ – линейная плотность внешних сил). Таким образом, смещение $\vec{u}(x)$ элемента AB удовлетворяет уравнению

$$\vec{T}(x + \Delta x) - \vec{T}(x) + \vec{f}(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 \vec{u}(x,t)}{\partial\, t^2}$$

Проекция этого векторного равенства на ось u, с учетом соотношений $T_u = T(x)\, sin\, \alpha = T(x)\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = T(x)\frac{u_x'}{\sqrt{1+(u_x')^2}} \approx T(x)u_x'$ и $g(x,t) = \vec{f}_u(x,t)$,

приводит к уравнению

$$T(x+\Delta x)\frac{\partial^2 u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\vec{T}(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x}+g(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, t^2}$$

Деление последнего равенства на Δx с последующим переходом к пределу при $\Delta x \to 0$ позволяет получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)u_x'(x,t)\Big)+g(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, t^2}$$

В силу произвольности выбора точки x полученное уравнение будет справедливо для всех точек струны. Таким образом, это уравнение является искомым уравнением малых поперечных колебаний струны

Критерии оценивания:

– анализ физических составляющий процесса поперечных колебаний и построение его математической модели с использованием закона Гука;

– вывод дифференциального уравнения в частных производных, решение которого описывает этот процесс

Компетенции: ПК-1, ПК-3

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Математическое моделирование физических систем» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № 8 от 24.02.2025	 В.В. Малый